IJ-1309

B.Sc. (Part - II)

Term End Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper - I

Advanced Calculus

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्नों से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) निम्नलिखित श्रेणी के अभिसरण का परीक्षण कीजिए :

$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots,$ $x > 0$

Test the convergence of the series :

$x^2(\log 2)^q + x^3(\log 3)^q + x^4(\log 4)^q + \ldots,$ $x > 0$

(*b*) यदि $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ वास्तविक संख्याओं का ऐसा अनुक्रम हो कि $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=1$, जहाँ $|l|<1$, तब सिद्ध कीजिए कि $\lim_{n\to\infty} a_n=0$ ।

If $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ be a sequence such that $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n+1}{a_n}=1$, where $|l|<1$ then prove that $\lim_{n\to\infty} a_n=0$.

OR

(*a*) उस श्रेणी की अभिसारिता का परीक्षण कीजिए जिसका nवाँ पद है :

$$\frac{n^p}{(n+1)^{p+\alpha}}$$

Test the convergence of series whose n^{th} term is :

$$\frac{n^p}{(n+1)^{p+\alpha}}$$

(*b*) एक दिष्ट अनुक्रम एक अभिसारी अनुक्रम होगा यदि और केवल यदि वह परिबद्ध हो, दिखाइए।
Show that monotone sequence is convergent if and only if it is bounded.

इकाई / Unit-II

2. (*a*) यदि फलन $f(x)$ एवं फलन $g(x)$ किसी बिन्दु $x=a$ पर संतत हैं, तो फलन $f(x)\cdot g(x)$ भी बिन्दु $x=a$ पर संतत होता है। सिद्ध कीजिए।

If $f(x)$ and $g(x)$ are continuous functions at a point $x=a$, then $f(x)\cdot g(x)$ is also continuous at $x=a$. Prove it.

(*b*) निम्नलिखित फलन के $x=1$ पर सांतत्य की विवेचना कीजिए

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & \text{when } 0\le x\le 1\\ 1-x, & \text{when } x>1\end{cases}$$

Discuss the continuity at $x=1$ of the following function :

$$f(x)=\begin{cases}1+x^2, & \text{when } 0\le x\le 1\\ 1-x, & \text{when } x>1\end{cases}$$

OR

(*a*) रोले प्रमेय को लिखिए तथा सिद्ध कीजिए।
State and prove Rolle's Theorem.

(*b*) फलन $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ के लिए अन्तराल [2, 4] में लैग्रांज के माध्यमान प्रमेय को सत्यापित कीजिए।

Verify Lagrange's Mean value theorem for the function $f(x)=\sqrt{x^2-4}$ in the interval [2, 4].

इकाई / Unit-III

3. (*a*) सीमा की परिभाषा का प्रयोग कर सिद्ध कीजिए कि फलन $f(x,y)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}: x\geq 0, y\geq 0$ मूल बिन्दु पर सतत है।

Using definition of limit, prove that the function $f(x,y)=\sqrt{x}\cdot\sqrt{y}: x\geq 0, y\geq 0$ is continuous at origin.

(*b*) यदि $x=a\cosh\alpha\cos\beta$, $y=a\sinh\alpha\sin\beta$, तो दिखाइये कि

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{a^2}{2}[\cosh 2\alpha-\cos 2\beta]$$

If $x=a\cosh\alpha\cos s\beta$, $y=a\sinh\alpha\sin\beta$, then show that :

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(\alpha,\beta)}=\frac{a^2}{2}[\cosh 2\alpha-\cos 2\beta]$$

OR

(*a*) यदि $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, सिद्ध कीजिए कि

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}$$

If $u=\log(x^3+y^3+z^3-3xyz)$, then show that :

$$\frac{\partial^2u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2u}{\partial z^2}=-\frac{3}{(x+y+z)^2}$$

(*b*) यदि $f(x,y)=e^{xy}$, तब बिन्दु (1, 1) पर फलन का प्रसार टेलर श्रेणी ज्ञात कीजिए।

If $f(x,y)=e^{xy}$, then find the expansion of the function by Taylor's series at the point (1, 1).

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) सरल रेखाओं के कुल $ax\sec\alpha-by\operatorname{cosec}\alpha=a^2-b^2$ का एन्वलप ज्ञात कीजिए, जहाँ कोण α प्राचल है।

Find the envelope of the family of lines $ax\sec\alpha-by\operatorname{cosec}\alpha=a^2-b^2$, where the parameter is the angle α.

(*b*) फलन $x^2+y^2+z^2$ का निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए, जबकि $ax+by+cz=P$ दिया गया है।

Find the minimum value of $x^2+y^2+z^2$ having given $ax+by+cz=P$.

OR

(*a*) दिर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ का केन्द्रज ज्ञात कीजिए।

Find the evolute of the ellipse $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$.

(*b*) फलन $u=x^3+y^3-3axy$ के उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ की विवेचना कीजिए।

Discuss the maximum or minimum values of the function $u=x^3+y^3-3axy$.

इकाई / Unit-V

5. (*a*) दिश: समाकलन में क्रम परिवर्तन कीजिए

$$\int_0^{2a}\int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)\,dxdy$$

Change the order of double integral

$$\int_0^{2a}\int_{x^2/4a}^{3a-x} f(x,y)\,dxdy$$

(*b*) मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty}\frac{x^4\left(1+x^5\right)}{(1+x)^{15}}dx$$

Evaluate :

$$\int_0^{\infty}\frac{x^4\left(1+x^5\right)}{(1+x)^{15}}dx$$

OR

(*a*) समाकल $\iiint(x+z)\,dx\,dy\,dz$ का मान ज्ञात कीजिए जबकि समाकलन क्षेत्र $x^2+y^2+z^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ और $z\ge 0$ परिभाषित हैं।

Find the value of the integral $\iiint(x+z)\,dx\,dy\,dz$ where region of the integral are defined as $x^2+y^2+z^2\le 1$, $x\ge 0$, $y\ge 0$ and $z\ge 0$.

(*b*) सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^4\right)^{1/2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

Prove that :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\left(1+x^4\right)^{1/2}} = \frac{\pi}{4\sqrt{2}}$$

———

IJ-1310

B.Sc. (Part - II)
Term End Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper - II

Differential Equations

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक इकाई से किन्हीं **दो** प्रश्नों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** questions from each Unit. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. सिद्ध कीजिए :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\phi - x\sin\phi)\, d\phi$$

जहाँ n एक घनात्मक पूर्णांक है।

Prove that :

$$J_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos(n\phi - x\sin\phi)\, d\phi$$

Where n is a positive integer.

2. फलन $f(x) = 10x^3 - 3x^2 - 5x - 1$ को लीजेन्ड्रे बहुपद के रूप में व्यक्त कीजिए।

Express the function $f(x) = 10x^3 - 3x^2 - 5x - 1$ in terms of Legendre polynomials.

3. स्टर्म ल्यूविलि समस्या

$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$, जहाँ $y(0) = 0$, $y(l) = 0$

के समस्त अभिलाक्षणिक मानों एवं संगत अभिलाक्षणिक फलनों को ज्ञात कीजिए।

Find all the eigen values and eigen functions of the following Sturm-Liouville problem

$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0$, where $y(0) = 0$, $y(l) = 0$

इकाई / Unit-II

4. मान ज्ञात कीजिए :

(*a*) $L\{e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\}$

(*b*) $L\{t^2 \sin at)\}$

Find the value of :

(*a*) $L\{e^{-t}(3\sinh 2t - 5\cosh 2t)\}$

(*b*) $L\{t^2 \sin at)\}$

5. मान ज्ञात कीजिए :

(*a*) $L^{-1}\left\{\log\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right\}$

(*b*) $L^{-1}\left\{\frac{p+1}{\left(p^2+2p+2\right)^2}\right\}$

Find the value of :

(*a*) $L^{-1}\left\{\log\left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\right\}$

(*b*) $L^{-1}\left\{\frac{p+1}{\left(p^2+2p+2\right)^2}\right\}$

6. लाप्लास रूपान्तर का प्रयोग करके निम्नलिखित समाकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\int_0^t \frac{F(u)}{\sqrt{t-u}} = 1 + t + t^2$$

Solve the following integral equation by using Laplace transform :

$$\int_0^t \frac{F(u)}{\sqrt{t-u}} = 1+t+t^2$$

इकाई / Unit-III

7. निम्नलिखित संबंध से स्वेच्छ फलन ϕ का विलोपन करके आंशिक अवकलन समीकरण का निर्माण कीजिए :

$$\phi(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2)=0$$

Find the partial differential equation by eliminating the arbitrary function ϕ from the following relation :

$$\phi(x+y+z,\ x^2+y^2-z^2)=0$$

8. आंशिक अवकल समीकरण का पूर्ण समाकल एवं विचित्र हल ज्ञात कीजिए :

$$p^3+q^3=27z$$

Find the complete integral and singular solution of the partial differential equation :

$$p^3+q^3=27z$$

9. चारपिट विधि से निम्न आंशिक अवकल समीकरण का पूर्ण समाकल ज्ञात कीजिए :

$$px+qy=pq$$

Find the complete integral of the following partial differential equation by using Charpit's method :

$$px+qy=pq$$

इकाई / Unit-IV

10. हल कीजिए :

$$s-t=\frac{x}{y^2}$$

Solve :

$$s-t=\frac{x}{y^2}$$

11. आंशिक अवकल समीकरण को हल कीजिए :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-4\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}+4\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=4\sin(2x+y)$$

Solve the partial differential equation :

$$\frac{\partial^3 z}{\partial x^3}-4\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}+4\frac{\partial^3 z}{\partial x \partial y^2}=4\sin(2x+y)$$

12. मोन्जे विधि से हल कीजिए :

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0$$

Solve by Monge's method :

$$x^2r + 2xys + y^2t = 0$$

इकाई / Unit-V

13. निम्नलिखित फलनक के चरम मान के लिए परीक्षण कीजिए :

$$I[y(x)] = \int_0^4 \left[xy' - y'^2\right] dx,\ y(0) = 0;\ y(4) = 3$$

Test for an extremum the functional :

$$I[y(x)] = \int_0^4 \left[xy' - y'^2\right] dx,\ y(0) = 0;\ y(4) = 3$$

14. निम्नलिखित फलनक का आयलर-ओस्ट्राग्रेडस्की समीकरण ज्ञात कीजिए :

$$I[z(x,y)] = \iint_D \left[p^2 + q^2 + 2zf(x,y)\right] dxdy$$

Find the Euler-Ostrogradsky equation of the functional :

$$I[z(x,y)] = \iint_D \left[p^2 + q^2 + 2zf(x,y)\right] dxdy$$

15. वृत्त $x^2 + y^2 = 1$ तथा सरल रेखा $x + y = 4$ के मध्य लघुत्तम दूरी ज्ञात कीजिए।

Find the shortest distance between the circle $x^2 + y^2 = 1$ and the straight line $x + y = 4$.

IJ-1311

B.Sc. (Part - II)

Term End Examination, 2018

MATHEMATICS

Paper - III

Mechanics

Time : Three Hours] [*Maximum Marks* : 50

नोट : प्रत्येक प्रश्न से किन्हीं **दो** भागों को हल कीजिए। सभी प्रश्नों के अंक समान हैं।

Note : Answer any **two** parts from each question. All questions carry equal marks.

इकाई / Unit-I

1. (*a*) रेखाओं $x+y=1, y-x=1, y=2$ द्वारा निर्मित त्रिभुज की भुजाओं के अनुदिश तीन बल P, Q, R क्रियाशील हैं। उनके क्रिया रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

Three forces P, Q, R acting along the sides of triangle through lines $x+y=1, y-x=1, y=2$. Find the equation of Resultant line.

(*b*) दर्शाइए कि अंतहीन चैन की लंबाई, जो त्रिज्या a के एक वृत्तीय घिरनी के ऊपर इस प्रकार लटकी हुई है कि घिरनी के परिधि के दो-तिहाई से संपर्क में है,

$$a\left[\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{4\pi}{3}\right]$$

Show that the length of an endless chain which will hang over a circular pulley of radius a so, as to be in contact with two-third of the circumference of the pulley is

$$a\left[\frac{3}{\log\left(2+\sqrt{3}\right)}+\frac{4\pi}{3}\right]$$

(*c*) दो बराबर एक समान छड़े AB एवं AC प्रत्येक की लंबाई $2b$ है, A पर स्वतंत्रतापूर्वक जुड़े हुए हैं। त्रिज्या a के एक चिकने उर्द्धवाधर वृत्त पर आराम में है। दर्शाइए कि यदि उनके बीच का कोण 2θ हो, तो

$$b\sin^3\theta = a\cos\theta$$

Two equal uniform rods AB and AC, each of length $2b$ are freely joined at A and rest on a smooth vertical circle of radius a. Show that if 2θ be angle between them, then

$$b\sin^3\theta = a\cos\theta$$

इकाई / Unit-II

2. (*a*) एक बल P, x अक्ष के अनुदिश क्रिया करता है, एक अन्य बल np बेलन, $x^2+y^2=a^2$ के एक जनक के अनुदिश क्रिया करता है, दर्शाइए कि केन्द्रीय अक्ष बेलन,

$$n^2(nx-z)^2+(1+n^2)^2y^2=n^4a^2$$

पर स्थित है।

A force P acts along the axis x and another force np along a generator of the cylinder $x^2+y^2=a^2$. Show that the central axis lies on the cylinder

$$n^2(nx-z)^2+(1+n^2)^2y^2=n^4a^2$$

(*b*) समतल $lx+my+nz=1$ का शून्य विक्षेप स्थिति ज्ञात कीजिए।

Find out null point of the plane $lx+my+nz=1$.

(*c*) दर्शाइए की किसी दिए गए बल निकाय के लिए राशियाँ $LX+MZ+NZ$ एवं $x^2+y^2+z^2$ निश्चर रहती हैं।

To show that the quantities $LX+MZ+NZ$ and $x^2+y^2+z^2$ are invariant for any given system of forces.

इकाई / Unit-III

3. *a)* एक कण दो बलों के केन्द्रों, जिनका आकर्षण दूरी के समानुपाती हैं के आकर्षण के अन्तर्गत साम्यवस्था में है। उनकी तीव्रताएँ μ तथा μ^1 है। उनमें किसी एक की ओर अल्पमात्र विस्थापित कर दिया गया है। दर्शाइए कि अल्प दोलन का समय $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu+\mu^1}}$ है।

A particle rests in equilibrium under the attraction of two centres of forces which attract directly as the distance, their intensity being μ, μ^1. The particle is slightly displaced towards one of them, show that the time of a small oscillation is $\frac{2\pi}{\sqrt{\mu+\mu^1}}$.

(*b*) एक कण P अचर वेग से एक वक्र बनाता है तथा किसी नियत बिन्दु O के सापेक्ष इसका कोणीय वेग इसकी O से दूरी के व्युत्क्रमानुपाती है। सिद्ध कीजिए कि वक्र एकसमान कोणीय सर्पिल है?

A particle P describes a curve with constant velocity and its angular velocity about a given fixed point O varies inversely as its distance from O, show that the curve is an equiangular spiral.

(*c*) एक तोप एक गतिशील प्लेटफार्म से चलाई जाती है जब प्लेटफार्म V वेग से आगे तथा पीछे चलता है तो गोली के परास क्रमशः R तथा S प्राप्त होते हैं। सिद्ध कीजिए कि तोप का उन्नतांश कोण

$$\tan^{-1}\left[\frac{g(R-S)^2}{4V^2(R+S)}\right] \text{ है।}$$

A gun if fixed from a moving platform and the ranges of the shot are observed to be R and S when the platform is moving forward and backward respectively with velocity V. Prove that the elevation of the gun is

$$\tan^{-1}\left[\frac{g(R-S)^2}{4V^2(R+S)}\right]$$

इकाई / Unit-IV

4. (*a*) एक कण नाभि की ओर दिष्ट एक बल $\frac{\mu}{(\text{दूरी})^2}$ के अंतर्गत एक दीर्घवृत निर्मित करता है। यदि यह बल केन्द्र से दूरी r पर एक बिन्दु से वेग V से प्रक्षिप्त किया गया था, तो दर्शाइए कि इसका आवर्तकाल निम्न है

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

A particle describes an ellipse under a force $\frac{\mu}{(\text{distance})^2}$ towards the focus. If it was projected with velocity V from a point distance r from the centre of force, show that its periodic time is

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\mu}}\left(\frac{2}{r}-\frac{V^2}{\mu}\right)^{-\frac{3}{2}}$$

(*b*) एक अचर वेग V से एक वक्र पर भ्रमण करता है, जिसके लिए S तथा ψ दोनों साथ साथ शून्य होते हैं। यदि किसी बिन्दु S पर त्वरण $\frac{V^2C}{S^2+C^2}$ हो, तो सिद्ध कीजिए कि वक्र एक कैटनरी है।

A particle describes a curve for which S and ψ vanish simultaneously with the uniform speed V. If the acceleration at any point S be $\frac{V^2C}{S^2+C^2}$, then prove that the curve is catenary.

(*c*) एक कण एक चिकने चक्रज, जिसका अक्ष उर्द्धवाधर एवं शीर्ष नीचे की ओर है, के कस्प से चाप पर नीचे की ओर V वेग से प्रक्षिप्त किया जाता है। दर्शाइए कि शीर्ष पर पहुचने का समय निम्न हो

$$2\sqrt{\frac{a}{g}}.\tan^{-1}.\left(\frac{\sqrt{4ag}}{V}\right)$$

A particle is projected with velocity V from the cusp of a smooth cycloid whose axis is verticle and vertex downwards, down the arc. Show that the time of reaching the vertex is

$$2\sqrt{\frac{a}{g}}.\tan^{-1}.\left(\frac{\sqrt{4ag}}{V}\right)$$

इकाई / Unit-V

5. (*a*) जब गुरूत्वीय आकर्षण में कोई कण उर्द्धवाधरत: U वेग से ऊपर की ओर प्रक्षेपित किया जाए तथा माध्यम का प्रतिरोधी बल उसके वेग के समानुपाती हो, तो दर्शाइए कि

$$x=\frac{V}{g}(V+U)\left(1-e^{-\frac{gt}{V}}\right)-Vt$$

जहाँ V अंतिम वेग है

When a particle is projected upwards under gravity in a resisting medium, whose resistance varies as the square of the velocity, then show that

$$x = \frac{V}{g}(V+U)\left(1-e^{-\frac{gt}{V}}\right) - Vt$$

where V is the terminal velocity.

(*b*) तरल की एक गोलाकार बुंद वाष्प में गिरते हुए संघनन द्वारा C की अचर दर से द्रव्यमान प्राप्त करती है। दर्शाइए कि विराम में गिरते हुए t समय बाद इसका वेग

$$\frac{1}{2}gt\left[1+\frac{M}{M+Ct}\right] \text{ है।}$$

The spherical drop of liquid falling freely in a vapour acquires moist by condensation at a constant rate C. Show that the velocity after falling from rest in time t is

$$\frac{1}{2}gt\left[1+\frac{M}{M+Ct}\right]$$

(*c*) बेलनीय निर्देशांक के पदों में किसी कण का त्वरण ज्ञात कीजिए।

Find acceleration of the particle in terms of cylindrical coordinates.

———